TD n^{o}6 : Couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un *couplage* de G est un sous-ensemble d'arêtes *indépendantes* $C \subset E$. Autrement dit, c'est un ensemble d'arêtes tel que chaque sommet du graphe est l'extrémité d'au plus une arête de C. Si chaque sommet du graphe est l'extrémité d'une arête de C exactement, le couplage est dit *parfait*.

Exercice 1. – Exemples introductifs.

a) Montrer que si $G = (V, E)$ contient un couplage parfait, alors $|V|$ est pair.

b) Déterminer les entiers n tels que P_n (chaine à $n+1$ sommets) contient un couplage parfait.

c) Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à $2p$ sommets contenant un couplage parfait.

d) Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. – Clique privée d'un certain nombre d'arêtes.

Soit $K_n = (V, E)$ le graphe complet à n sommets, avec n pair et $n \geqslant 2$. Soit A l'ensemble des entiers k de $\{0, \ldots, \binom{n}{2}\}$ tels que pour tout $F \subset E$ de cardinal k, $K_n \setminus F$ contient un couplage parfait. Soit B l'ensemble des entiers k de $\{0, \ldots, \binom{n}{2}\}$ tels que pour tout $F \subset E$ de cardinal k, $K_n \setminus F$ ne contient pas de couplage parfait.

a) Montrer que $0 \in A$ et $\binom{n}{2} \in B$.

b) Montrer que A et B sont des intervalles de $\{0, \ldots, \binom{n}{2}\}$.

c) Montrer que $A \cap B = \emptyset$.

d) Soit $a_n = \max A$ et $b_n = \min B$. Déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 3. – Couplages dans les arbres binaires, aspects algorithmiques.

On considère dans cet exercice des arbres binaires enracinés planaires. Enraciné signifie qu'un sommet unique est *marqué*, c'est la racine. Planaire signifie qu'on distingue le fils gauche et le fils droit. Les arbres considérés peuvent avoir des noeuds possédant un seul fils (contrairement à d'autres types d'arbres binaires où chaque noeud possède 0 ou 2 fils).

a) Donner deux exemples d'arbres binaires à 10 sommets et de hauteur 3, l'un contenant un couplage parfait, et l'autre non.

Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux aspects algorithmiques.

b) Donner une définition récursive des arbres binaires. En déduire une structure de données que vous utiliserez dans la suite du problème.

c) Écrire un algorithme récursif décidant en temps linéaire si un arbre binaire fourni en entrée contient un couplage parfait.