Gestion des symétries dans une résolution exacte de l'affectation quadratique à trois dimensions

B. Le Cun,[1] and F. Galea[2]

[1] Laboratoire PR*i*SM, 45 avenue des Etats-Unis 78035 Versailles CEDEX.
`Bertrand.Lecun@prism.uvsq.fr`
[2] Laboratoire PR*i*SM Versailles, Laboratoire G-SCOP, Grenoble INP
`Francois.Galea@prism.uvsq.fr`

1 Introduction

Le problème d'affectation quadratique à trois dimensions (Q3AP) est une extension du problème d'affectation quadratique (QAP), qui occupe une large place dans la littérature d'Optimisation Combinatoire.

Le Q3AP a été présenté par P. Hahn *et al.* [**?**]. La motivation principale a été l'optimisation d'un schéma de retransimissions sur réseau sans fil, en affectant des symboles de modulation à des séquences binaires de taille fixe. Des erreurs de transimmision pouvant avoir lieu, les paquets erronés sont susceptibles d'être retransmis. La diversité est une mesure de l'indépendance statistique entre une transmission et les éventuelles retransmission successives. Maximiser la diversité revient à réduire la probabilité d'erreurs lors des retransmissions. Comme présenté par P. Hahn *et al.*, lorsque l'on considère qu'une seule retransmission, ce problème revient à un QAP. Le Q3AP correspond à au cas de deux retransmissions.

Une autre illustration de ce problème peut être faite en reprenant les termes du QAP. Etant donnés N managers, N usines, et N sites, le problème consiste à affecter chaque manager et chaque usine à chaque site, de telle sorte à minimiser le coût total. Le coût d'une affectation est la somme de coûts linéaires L_{ijk} où i est le manager, j l'usine et k le site plus les coûts quadratiques C_{ijklmn} où i et l sont des managers, j et m des usines et k et m des sites. Plus formellement le problème se modélise comme suit :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{ijk}x_{ijk} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N} C_{ijklmn}x_{ijk}x_{lmn} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1,\cdots,N\} \\
& \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1,\cdots,N\} \\
& \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1,\cdots,N\} \\
& x_{ijk} \in \{0,1\} && \forall i,j,k \in \{1,\cdots,N\}
\end{aligned}
$$

Comme pour le QAP, où les matrices symétriques de flux et de distances peuvent donner lieu à de nombreuses solutions symétriquement équivalentes, les instances du Q3AP ont elles aussi des structures symétriques. Par exemple, dans l'application de transmission sans fil, l'affectation des symboles de modulation lors de la première et de la seconde retransmission peuvent être échangées sans modifier la valeur de la solution. Détecter ces symétries a permis de réduire considérablement les tailles des arbres de recherche lors de résolution exacte par méthode de séparation et évaluation. Nous nous intéressons dans cette présentation à la détection de deux types de symétries pour le Q3AP et aux méthodes permettant d'interdire la génération de branches symétriques lors de la recherche.

Le premier type de symétrie concerne les indices. En effet, sur certaines instances, si les indices de sites et d'usines sont échangés, les solutions sont équivalentes. Plus formellement, une instance de Q3AP est dite indice-symétrique en i si

$$\forall i, j, k \in N^3,\ L_{ijk} = L_{ikj}$$
$$\forall i, j, k \in N^3,\ C_{ijklmn} = C_{ikjlnm}$$

De la même manière, des instances aussi être indice-symétriques en j et en k.

Le second type de symétrie concerne les permutations elles-mêmes. Par exemple, les deux tableaux suivants présentent deux solutions, où les affectations des managers 0 et 3 ont été inversées. Si on peut montrer que ces deux solutions sont de coût égal pour tous j_1, j_2, k_1, k_2 tels que les solutions restent réalisables, alors il existe une permutation-symétrie sur les 2 couples de triplets $((0, 1, 3), (3, 3, 1))$ et $((0, 3, 1), (3, 1, 3))$.

i	0	1	2	3
j	1	j_1	j_2	3
k	3	k_1	k_2	1

m	0	1	2	3
u	3	j_1	j_2	1
s	1	k_1	k_2	3

La résolution exacte de ce problème par Branch and Bound utilise une borne inférieure issue de la formulation RLT1 du QAP [?,?]. Notre solveur est implémenté sur la plateforme de développement Bob++ permettant des résolutions séquentielles ou parallèles [?,?].

Références

1. P. Hahn, K. Bum-Jin, T. Stutzle, S. Kanthak, W. L. Hightower, H. Samra, Z. Ding, and M. Guignard. The quadratic three-dimensional assignment problem : Exact and approximate solution methods. *European Journal of Operational Research*, 184(2) :416–428, 2008.
2. F. Galea and B. Le Cun. Bob++ : a Framework for Exact Combinatorial Optimization Methods on Parallel Machines. In *PGCO'2007 as part of the 2007 International Conference High Performance Computing & S imulation (HPCS'07) and in conjunction with The 21st European Conference on Modeling and Simulation (EC MS 2007)*, pages 779–785, June 2007.
3. Bob++ : Framework to solve Combinatorial Optimization Prob lems `http://bobpp.prism.uvsq.fr/`.
4. P. Hahn and T. Grant. Lower bounds for the quadratic assignment problem based upon a dual formulation. *Operations Research*, 46 :912–922, 1998.