Programmation Mathématique : Modélisation

Bertrand Le Cun

Université Paris-Ouest-Nanterre-La Défense
&
Laboratoire PRiSM, Université de Versailles-Saint-Quentin

21 février 2011

Un Modèle

Représentation simplifiée

Modèle simplifié de la réalité élaborée pour aider à

- mieux percevoir la situation
- mieux atteindre les objectifs fixés

Mathématique

Représenter une décision par des variables,

- Elles ne peuvent prendre que certaines valeurs dues à des contraintes.
- Les valeurs des variables induisent un coût ou un gain.

Un modèle

Démarche

- Origine :

  Problème de gestion de décision

- Modélisation :

  Fomulation mathématique correspondant
  à une simplification de la réalité

- Résolution :

  Généralement à l'aide de logiciels informatiques

- Analyse des résultats

  décisions à prendre, affiner le modèle

Modélisation

3 composantes :

- Les variables

  leurs valeurs donnent la solution

- La fonction économique

  sa valeur donnent le coût ou le gain du problème

- Les contraintes

  Contraindre les valeurs possibles des variables.

Les variables

Décision

Point le plus important, le plus délicat

- Quelles variables retenir ?
- Qu'essaye-t-on de fixer ?

Leur valeurs représentent la décision à prendre pour optimiser la solution

La fonction économique

Coût de la solution

Fonction que l'on cherche à optimiser

Min/Max

- Minimser le coût induit par une décision
- Maximiser le gain induit par une décision

Souvent : convertir une décision sous forme
de trucs sonnants et trébuchants

Les contraintes

On ne peut pas tout faire

- Ensembles de rêgles à respecter
- Solution réalisable : solution respectant toutes les contraintes
- Domaine d'admissibilité : Ensemble des solutions réalisables

Exemple

2 machines de production

2 machines M_1 et M_2 sont dédiées à la production de 2 produits A et B. La production d'un article A (B) demande en moyenne

- $\frac{1}{2}$ heure d'utilisation de M_1 ($\frac{3}{4}$ heure)
- 1 heure d'utilisation de M_2 ($\frac{1}{2}$ heure)

Du fait des temps d'entretien ...,

- M_1 ne fonctionne en moyenne que $18h/jour$
- M_2 ne fonctionne en moyenne que $20h/jour$

Bénéfice unitaire moyen de A (B) est de $400E$ ($500E$).

Que cherche-t-on ?

Le plan de production qui maximise le profit !

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.

Les variables

Les contraintes

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A$=\frac{1}{2}$h et 1B$=\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$
- Sur M_2, 1 A=1h et 1B=$\frac{1}{2}$h et M_2 : $20h/jour$.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$
- Sur M_2, 1 A=1h et 1B=$\frac{1}{2}$h et M_2 : $20h/jour$.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$
- Sur M_2 : $x_a + \frac{1}{2}x_b \leq 20$

Fonction Economique

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$
- Sur M_2, 1 A=1h et 1B=$\frac{1}{2}$h et M_2 : $20h/jour$.
- on produit.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$
- Sur M_2 : $x_a + \frac{1}{2}x_b \leq 20$

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$
- Sur M_2, 1 A=1h et 1B=$\frac{1}{2}$h et M_2 : $20h/jour$.
- on produit.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$
- Sur M_2 : $x_a + \frac{1}{2}x_b \leq 20$
- Les contraintes de signe (d'intégrité)

$$x_a \geq 0,\ x_b \geq 0$$

Fonction Economique

Modélisation de l'exemple

"Français"

- Plan de production de 2 produits A et B.
- Sur M_1, 1 A=$\frac{1}{2}$h et 1B= $\frac{3}{4}$h et M_1 : $18h/jour$
- Sur M_2, 1 A=1h et 1B=$\frac{1}{2}$h et M_2 : $20h/jour$.
- on produit.
- On gagne $400E/A$, $500E/B$.

Les variables

x_a et x_b le nombre de produits de type A et de B par jour,

Les contraintes

- Sur M_1 : $\frac{1}{2}x_a + \frac{3}{4}x_b \leq 18$
- Sur M_2 : $x_a + \frac{1}{2}x_b \leq 20$
- Les contraintes de signe (d'intégrité)
$$x_a \geq 0, \; x_b \geq 0$$

Fonction Economique

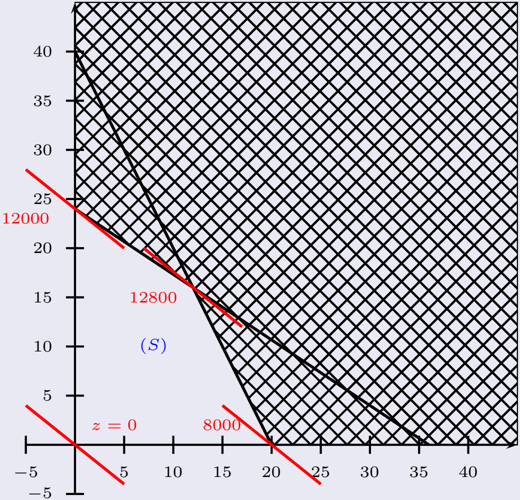
Maximiser le profit
$= 400x_a + 500x_b$

Modélisation de l'exemple

Finalement

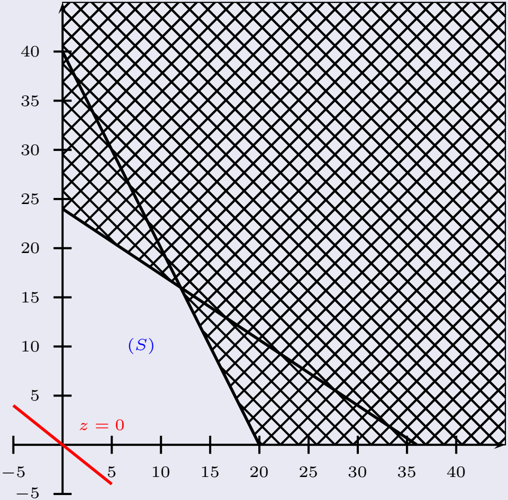
$$
\begin{array}{lllll}
\max & 400x_a & + & 500x_b & \\
\text{s.c.} & & & & \\
& \frac{1}{2}x_a & + & \frac{3}{4}x_b & \leq & 18 \\
& x_a & + & \frac{1}{2}x_b & \leq & 20 \\
& x_a \geq 0 & , & x_b \geq 0 & &
\end{array}
$$

2 variables : Représentation en 2D



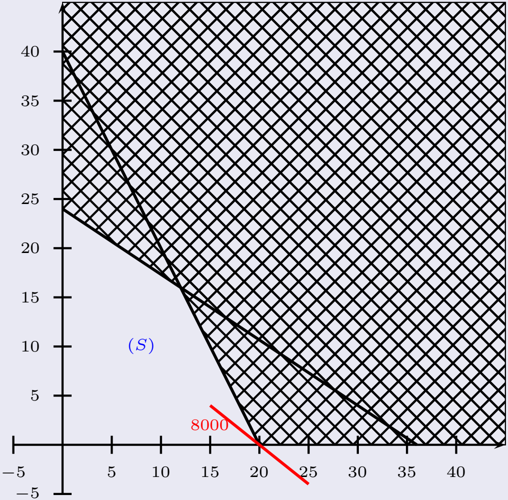
Résolution Graphique

2 variables : Représentation en 2D



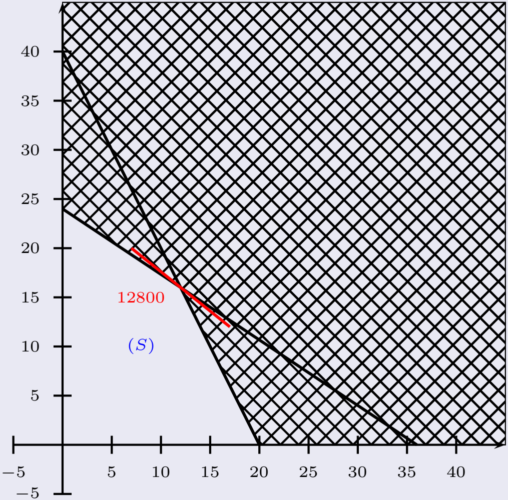
Résolution Graphique

2 variables : Représentation en 2D



Résolution Graphique

2 variables : Représentation en 2D



Toutes les expressions sont Linéaires

- Les contraintes

$$\sum d_i x_i \leq 130$$
$$\sum d_{ij} x_{ij} \leq 130$$

- La Fonction objective

$$\sum c_i x_i$$
$$\sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} + \sum_k F_k y_k$$

Méthodes de résolution

Très variées

- Si les variables sont réelles

  Algorithme du Simplexe

- Si les variables sont entières

  Algorithme du Simplexe+ Arbre de décision

  Fixer les variables en entier Algorithme Branch and Bound

Exemple plus Complexe

Affectation

n personnes peuvent effectuer n travaux. Chaque personne est assignée à un travail particulier. Affecter une personne i à un travail j coute c_{ij}
Le problème est de trouver l'affectation de chacune des personnes à chacun des travaux de manière à minimiser le coût global.

Exemple plus Complexe

Affectation

n personnes peuvent effectuer n travaux. Chaque personne est assignée à un travail particulier. Affecter une personne i à un travail j coute c_{ij}
Le problème est de trouver l'affectation de chacune des personnes à chacun des travaux de manière à minimiser le coût global.

Le programme

$$
\begin{array}{lllr}
\min & \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & \sum_{i} x_{ij} & = 1 & \forall j \in [1 \dots n] \\
 & \sum_{j} x_{ij} & = 1 & \forall i \in [1 \dots n] \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i,j \in [1 \dots n]^2 &
\end{array}
$$

Exemple plus complexe

Sac à dos

Un sac a une capacité fixée de V litres. Un objet i prend un volume v_i dans le sac. L'utilité de cet objet dans le sac est caractérisée par une valeur c_j. On doit choisir un sous-ensemble d'objets parmis les n objets disponibles permettant de maximiser la somme des utilités des objets.

Exemple plus complexe

Sac à dos

Un sac a une capacité fixée de V litres. Un objet i prend un volume v_i dans le sac. L'utilité de cet objet dans le sac est caractérisée par une valeur c_j. On doit choisir un sous-ensemble d'objets parmis les n objets disponibles permettant de maximiser la somme des utilités des objets.

Le programme

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_j c_j x_j & \\ \text{s.c.} & \sum_j v_j x_j & \leq \text{V} \\ & x_j \in \{0,1\} & \forall j \in [1 \ldots n] \end{array}$$

Autre exemple plus abstrait

Des flôts dans un réseaux

Plusieurs machines reliées par un réseaux comportant des routeurs. Une machine ou un routeur i est connecté à une autre machine ou routeur j par un lien "réseau" de capacité k_{ij} (en bande passante et/ou débit). Utiliser une unité de traffic sur le lien (i, j) coute c_{ij} euros. Des demandes de traffic entre les machines ou routeurs sont données par d_{ij}.
Question : Par où peut-on faire passer le flux des demandes de manières à minimiser le coût total ?

Autre exemple plus abstrait

Des flôts dans un réseaux

Plusieurs machines reliées par un réseaux comportant des routeurs. Une machine ou un routeur i est connecté à une autre machine ou routeur j par un lien "réseau" de capacité k_{ij} (en bande passante et/ou débit). Utiliser une unité de traffic sur le lien (i, j) coute c_{ij} euros. Des demandes de traffic entre les machines ou routeurs sont données par d_{ij}. Question : Par où peut-on faire passer le flux des demandes de manières à minimiser le coût total ?

Idée de modélisation

On doit définir le flux x_{ij} passant sur chaque lien (i, j) ne dépassant pas la capacité maximale du lien, assurant le traffic demandé par les dij et minimisant les coûts de transport.

Modélisation (1)

Notations

n machines ou routeurs

Fonction de coût

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Minimser la somme sur tous les liens du produits du flux calculé x_{ij} par du coût c_{ij} sur le lien (i, j).

Modélisation (1)

Notations

n machines ou routeurs

Fonction de coût

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Minimser la somme sur tous les liens du produits du flux calculé x_{ij} par du coût c_{ij} sur le lien (i, j).

Contrainte de capacité

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall i, j \in [1 \ldots n]$$

Chaque flux calculé doit être inférieur à la capacité du lien.

Modélisation (2)

Contrainte de conservation de flux

Tout flux entrant doit ressortir !

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k x_{jk} \quad \forall j \in [1 \dots n]$$

Modélisation (3)

Contrainte sur les demandes

Toutes les demandes d_{ij} doivent être assurer.
Pour une demande d_{ij}, on force à ce que la i recoive un flux égale à d_{ij}.
Pour ne pas aller à l'encontre de la conservation de flux, on crée deux machines fictives, la machine 0 et la machine n+1. Sur lesquelles la conservation de flux n'est pas respectée. Puis on fixe que x_{0i} (le flux sortant de 0 et allant à i) est égal à la somme des demandes sortantes de i. De même, $x_{j,n+1}$ le flux sortant de j et entrant en (n+1) est égale au flux des demandes devant arriver en j.

$$x_{0i} = \sum_k d_{ki} \quad \forall i \in [1 \dots n]$$

$$x_{i,n+1} = \sum_k d_{ik} \quad \forall i \in [1 \dots n]$$

Autre exemple plus abstrait

Des flôts dans un réseaux

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & x_{ij} & \leq k_{ij} & \forall i, j \in [1 \ldots n] \\
& \sum_i x_{ij} & = \sum_k x_{jk} & \forall j \in [1 \ldots n] \\
& x_{0i} & = \sum_k d_{ki} & \forall i \in [1 \ldots n] \\
& x_{i,n+1} & = \sum_k d_{ik} & \forall i \in [1 \ldots n] \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i, j \in [1 \ldots n]^2 &
\end{array}
$$

Exemple plus complexe

Problème d'affectation Quadratique

Problème où n usines doivent être placèes sur n sites.
Deux sites l et k sont à une distance de d_{lk}.
Deux usines i et j échangent un volume f_{ij} de matières.
Le coût de placer une usine i sur le site l et une autre usine j sur le site k, est de $d_{lk}.f_{ij}$.

Exemple plus complexe

Problème d'affectation Quadratique

Problème où n usines doivent être placèes sur n sites.
Deux sites l et k sont à une distance de d_{lk}.
Deux usines i et j échangent un volume f_{ij} de matières.
Le coût de placer une usine i sur le site l et une autre usine j sur le site k, est de $d_{lk}.f_{ij}$.

Le programme

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_i \sum_j \sum_l \sum_k d_{lk} f_{ij} x_{il} x_{jk} & & \\
\text{s.c.} & \sum_i x_{il} & \leq 1 & \forall l \in [1...n] \\
 & \sum_l x_{il} & \leq 1 & \forall i \in [1...n] \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i,j \in [1...n] &
\end{array}
$$