Combinatoire

Exercice 1

Principe des pigeons : si on a $n+1$ pigeons pour n trous, alors il existe un trou avec au moins deux pigeons.
Soit f une application de E dans F. Si $card(E) > card(F)$ alors f est non injective. Expliquer pourquoi en utilisant le principe des pigeons.

Exercice 2

Soit E un ensemble de $n+1$ entiers distincts tel que $E \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Montrer qu'il existe deux entiers $e_1, e_2 \in E^2$ tels que $e_1 + e_2 = 2n+1$.

Exercice 3

Expliquer pourquoi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Exercice 4

Expliquer pourquoi

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \times \binom{n}{k-i}$$

Exercice 5

Un anagramme est un mot obtenu par la permutation des lettres d'un autre mot. Par exemple **Aimer** est l'anagramme de **Marie**.

1. Considérons un mot de n lettres distinctes deux à deux, combien d'anagrammes peut on former à partir de ce mot ?
2. Combien d'anagrammes peut on former à partir du mot **Anagramme** ?

Exercice 6

Lors d'une partie de Texas Hold'em, vous remarquez que votre adversaire porte des lunettes à verre réfléchissant. Vous pouvez donc voir les cartes qu'il a en main. Voici la configuration de jeu :

Vous : K♡ J♡
Sur la table : A♡ K♢ 10♡ 3♠
Adversaire : A♠ Q♠

1. Quelles sont les possibilités de tirage de la cinquième carte qui peuvent vous faire gagner ?
2. Quelles sont les probabilités de tirer une de ces cartes ?
3. Si le K♢ sur la table était un K♠, cela changerait-il les probabilités de gagner ?

Exercice 7

Un jeu de poker contient 52 cartes. On tire trois cartes au hasard. Calculer les probabilités d'avoir, parmis ces trois cartes, les combinaisons suivantes :

1. Un brelan d'as (ex : A♠A♡A♢)
2. Trois cartes cœur
3. Trois cartes carreau dans l'ordre croissant

Exercice 8

Le *mélange australien* consiste à mélanger un paquet de cartes de la manière suivante :

1. prendre la carte du dessus du paquet, la poser sur une pile sur la table
2. prendre la carte du dessus du paquet, la mettre sous le paquet
3. recommencer jusqu'à épuisement du paquet dans la main

Lorsque l'on prend huit cartes rangées dans l'ordre, et qu'on les mélange quatre fois suivant le mélange australien, le paquet obtenu est encore trié. On appelle cela un *faux mélange*.

1. Représenter le mélange australien sous la forme d'une permutation
2. En termes de permutations, qu'est-ce qu'une succession de mélanges ?
3. Que peut-on dire d'une succession de mélanges qui laisse le paquet sous sa forme de départ ?
4. Soit S_n le nombre de mélanges australiens à faire pour ramener un paquet de n cartes dans sa forme de départ. Calculer S_2, S_3, S_4.
5. Essayer de retrouver ce nombre uniquement à partir de la permutation. Pouvez-vous calculer S_5 sans effectuer les mélanges sur un paquet ?
6. Que peut-on dire sur S_{11} ?
7. Peut-on généraliser cela à d'autres mélanges que le mélange australien ?