

Révisions

Exercice 1

Une grenouille peut monter le long d'un escalier en faisant des bonds d'une ou de deux marches à la fois. Combien y a-t-il de manières pour cette grenouille de monter un escalier de 9 marches ? De n marches ?

Exercice 2

Soit G un graphe non orienté, planaire. Soient s son nombre de sommets, a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces. Prouver la formule d'Euler : $s + f - a = 2$.

Exercice 3

Il y a très longtemps, dans une contrée reculée, habitait une population de logiciens. Dans ce village, 45 femmes trompaient leurs maris, et chaque homme avait connaissance des femmes adultères du village, sauf bien sûr de la sienne. Un jour, le chef du village proclama l'édit suivant :

- Il y a au moins une femme adultère dans le village
 - Chaque nuit, si un homme a la certitude que sa femme est adultère, il a le droit de la tuer.
- Quelles seront les conséquences de cet édit ?

Exercice 4

Soit G un graphe non orienté. Montrer que si G , non supposé connexe, contient exactement deux sommets de degrés impairs, alors ces sommets sont reliés par une chaîne.

Exercice 5

Dans un tournoi de tennis à élimination directe, on compte 513 participants. Tous les matches sont joués jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur, qui est déclaré vainqueur du tournoi. Combien y-a-t-il eu de matches ?

Exercice 6

On souhaite séquencer un morceau d'ADN, que l'on va représenter par une séquence de lettres dans l'alphabet $\{A, T, G, C\}$. Nous avons à notre disposition une méthode de séquençage qui renvoie de petits morceaux de séquence de quatre lettres, et nous savons que ces morceaux se chevauchent de deux lettres. Ainsi, la séquence $AGGCAA$ pourrait être découpée en $AGGC$ et $GCAA$, où les deux morceaux se chevauchent en GC .

Supposons que nous ayons obtenu l'ensemble de morceaux suivant :

$$S = \{AGGG, ATAG, AAAT, ATTA, GGTT, TGGG, GGAA, TTCA, CATA, TATG, TAAG\}$$

Problème P : comment obtenir la séquence entière correspondant à ces morceaux ?

Quelqu'un nous propose de nous vendre un logiciel permettant de résoudre le problème suivant :

Problème Q : soit G un graphe orienté. Trouver un chemin dans G passant par tous les sommets une fois et une seule.

Trouvez un isomorphisme entre les instances du problème P et les instances du problème Q, de sorte que résoudre Q permet de résoudre P.

Exercice 7

Expliquer pourquoi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercice 8

Combien y-a-t-il de plaques minéralogiques pour un département donné, avec quatre chiffres et deux lettres, ou trois chiffres et trois lettres ?

Exercice 9

On définit l'opération \oplus dans $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + b \bmod 2, c + d \bmod 3)$. Trouver un isomorphisme de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Exercice 10

Mon tiroir contient dix paires de chaussettes de couleurs différentes. Les paires sont défaits.

1. Dans le noir, combien dois-je tirer de chaussettes de mon tiroir pour être sûr d'avoir une paire de même couleur ?
2. Même question si j'ai cinq paires noires et cinq paires grises.
3. Même question avec trois couleurs : noir, grises et beiges, de quatre, quatre et deux paires respectivement.

Exercice 11

Vous êtes huit à dîner autour d'une table ronde avec huit places numérotées.

1. Combien y-a-t-il de plans de table différents ?
2. Même question s'il y a quatre hommes et quatre femmes, et qu'un homme doit s'asseoir à côté d'une femme
3. Même question si ce sont quatre couples et que les conjoints ne doivent pas être voisins
4. Même question si les conjoints ne doivent pas non plus être en face
5. Même question si les places ne sont pas numérotées