1 Manipulations de bases

Exercice 1

Cole Sear, le petit garçon du *Sixième sens*, disait : « I see dead people ». Ce que le protagoniste, joué par Bruce Willis, ne savait pas, c'est que le petit garçon comptait en hexadécimal. Combien de personnes voyait-il ?

Exercice 2

Faire les conversions suivantes :
- $(101010)_2$ en base 10
- $(483)_{10}$ en binaire
- $(111100011)_2$ en hexadécimal

Exercice 3

Calculer, sans passer systématiquement par la base 10, les expressions suivantes :
- $(102013)_4 + (1)_4$
- $(102013)_4 \times (4)_{10}$ et $(102013)_4 \div (4)_{10}$
- $(101011)_2 + (2A)_{16}$
- $(10110)_2 + (111)_1$

2 Logarithmes et puissances

Exercice 4

1. Quel est le nombre le plus grand que l'on puisse représenter avec n caractères en binaire ?
2. En déduire le nombre de caractères nécessaires pour représenter en binaire un nombre m quelconque.
3. Généraliser à une base b quelconque.

Exercice 5

1. Combien faut-il de caractères pour représenter $(42)_{10}$ en binaire ?
2. Combien vaut $\log_2(16)$?
3. À partir des deux questions précédentes, calculer combien il faut de caractères pour représenter $(42)_{10}$ en hexadécimal.

3 Preuves par récurrence

Exercice 6

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $$\forall n \geq 1, \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\forall n \geq 1, \quad 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6$$

3. $$\forall n \geq 1, \quad (n^3 - n) \text{ est divisible par } 3$$

Exercice 7

Un nombre premier est un entier supérieur à 1 qui n'a pas d'autre diviseurs que 1 et lui-même. Montrer que tout entier positif peut être décomposé en un produit de facteurs premiers.

Exercice 8

On se propose de démontrer le théorème suivant :
Théorème : tout le monde est d'accord avec le professeur
Preuve :

1. On considère tout d'abord un groupe de taille $n = 1$, composé uniquement du professeur. La propriété est naturellement vérifiée ;
2. On suppose maintenant que la propriété est vraie pour un groupe de taille n. On considère alors un groupe de taille $n+1$, où le professeur est la $n^{\text{ième}}$ personne. Si on exclue la personne $n + 1$, alors tout le monde est d'accord avec le professeur (par hypothèse de récurrence). Si on retire maintenant la première personne, les n personnes restantes sont également d'accord avec le professeur.
   On conclue donc que la propriété est vraie pour $n + 1$.

Question : cette preuve est-t-elle correcte ? Si non, où est l'erreur ?